高次元特異集合を持つ非線型楕円型方程式の解の1つの構成法 (非線形発展方程式の解の正則性と解の爆発との関連)

高橋, 太

数理解析研究所講究録
1045 巻 1998 年 134-147

高次元特異集合を持つ非線型楕円型方程式の解の1つの構成法

高橋 太 (Futoshi Takahashi) 東京工業大学

§1. 序

$\Omega \subset \mathbf{R}^n (n \geq 3)$ を開集合、$p > 1$ とする。$u \in L^p(\Omega)$ が方程式

$$(1) \qquad -\Delta u = u^p$$

の正値弱解であるとは、$u(x) \geq 0$ a.e.$x \in \Omega$ かつ u が distribution の意味で (1) をみたすこととする。(1) の正値弱解 u に対して、u の特異集合 $\Sigma = \mathrm{sing}(u)$ を、$\Sigma = \{x \in \Omega : x$ の任意の 近傍上で u は有界でない$\}$ と定義する。$x \in \Omega$ のある近傍上で u が有界であれば、通常の楕円型方程式の解の正則性の理論によって u は x の小さい近傍上で C^∞の regularity を持つから、Σ は u が無限回微分可能でない Ω の点の全体となる。また Σ は Ω の相対閉集合である。

<u>注意 1.1</u>

1. $p < \frac{n}{n-2}$ のとき、(1) の任意の正値弱解 u に対し $\Sigma = \phi$ となる。(elliptic L^1 評価 [2, Appendix]: $\Delta u \in L^1(\Omega) \Rightarrow u \in L^q(\Omega), \forall q < \frac{n}{n-2}$ と bootstrap による。)

2. $p \geq \frac{n}{n-2}$ のとき、(1) の singular positive weak solution は実際に存在する。

孤立特異点を持つ singular radial solution の存在については、$p = \frac{n}{n-2}$の場合、Aviles [1] 参照。$p > \frac{n}{n-2}$の場合、Gidas-Spruck [4, Appendix A] 参照。特に

$$(2) \quad v_0(x) = C_{n,p} r^{\frac{-2}{p-1}}, \quad r = |x|, \quad x \in B_1^n(0), \qquad C_{n,p} = \left\{ \left(\frac{2}{p-1} \right) \left(n - \frac{2p}{p-1} \right) \right\}^{\frac{1}{p-1}}$$

は、任意の $p > \frac{n}{n-2}$ で $L^p(B_1^n(0))$ に属する (1) の正値弱解である。

さらに $\frac{n}{n-2} < p < \frac{n+2}{n-2}$ のときには (2) の他に

$$(3) \qquad v_1(x) = \begin{cases} (1+o(1)) C_{n,p} r^{\frac{-2}{p-1}} & (r = 0 \text{ の近くで}) \\ (1+o(1)) r^{2-n} & (r = \infty \text{ の近くで}) \end{cases}$$

となる singular radial solution $\in L^p(\mathbf{R}^n)$ が存在する。

近年の "singular Yamabe problem" (M をコンパクト Riemann 多様体、Λ を M の閉集合として、M の計量を共形的に変形することで、$M \setminus \Lambda$ 上完備かつスカラー曲率一定の計量を得ることができるか?) に対する興味を研究の動機として、(1) の singular solution に対しても多くの問題が考えられはじめている。特に,

- 特異集合 Σ の size (Hausdorff 次元の評価) 及び構造 (例えば rectifiability など) は?
- Σ を prescribe したときに解は存在するか?

などが重要な問題と思われる。本稿では以下の各章において主に第 2 の問題 (prescribing singularity problem) の進展について既知の結果を眺め、それらの結果では cover できない

ケースについて N.Smale [13] による"equivariant construction" という手法を用いて、特殊な領域 Ω 上で、特殊な Σ を特異集合として持つ (1) の解が構成できることを示す。

この章の最後に（自明な）高次元特異集合を持つ (1) の解の例を挙げる。

例 1.2　$k \geq 1$, $n \geq 3$ とする。$p > \frac{n}{n-2} (> \frac{n+k}{n+k-2})$ のとき、$B_1^n(0)$ 上の方程式 (1) の singular radial solution v_0 を考える。$(x, y) \in B_1^n(0) \times \mathbf{R}^k$ に対し $\tilde{u}(x, y) = v_0(x)$ とおくと、$\tilde{u}$ は 方程式 (1) を $B_1^n(0) \times \mathbf{R}^k$ 上で満たす正値弱解であり、$\mathrm{sing}(\tilde{u}) = \{0\}_n \times \mathbf{R}^k$ 。

以下、（低次元集合）× (Euclid 空間) の形の特異集合を自明な特異集合と呼ぶことにする。

自明な特異集合を持つ解は、この例のように既知の singular solution に冗長変数を付け加えることでいつでも構成することができる。後の"equivariant construction" method では、この例に small perturbation を加えて、非自明な高次元特異集合を持つ解を構成する。

§2. prescribing singularity problem の最近の進展

(1) の singular solution が存在する下限の指数 $p = \frac{n}{n-2}$ のときには、特異集合として Ω の任意の閉集合を prescribe できる:

定理 2.1(F.Pacard '93 [10])　$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ を有界 C^∞ 領域、$S \subset \Omega$ を任意の閉集合とする。このとき

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^{\frac{n}{n-2}} \quad \text{in } \Omega \\ \quad u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の正値弱解 $u \in L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)$ で $\mathrm{sing}(u) = S$ となるものが無限個存在する。

証明は変分法的手法 (Mountain Pass Lemma と minimization) による。ここで得られた解はすべて ($\Omega \setminus S$ では C^∞ な関数) + ($H_0^1(\Omega)$ の関数) の形をしているので境界条件には意味がある。

$m > n$ のとき定理 2.1 で得られた $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上の singular solution u を用いて $\tilde{u}(x_1, x_2, \cdots, x_m) = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とおくと $\tilde{u}$ は $p = \frac{n}{n-2} (> \frac{m}{m-2})$ に対して方程式 (1) を $\Omega \times \mathbf{R}^{m-n} \subset \mathbf{R}^m$ 上で満たす正値弱解で、しかも $\mathrm{sing}(\tilde{u}) = S \times \mathbf{R}^{m-n}$ となる。S の Hausdorff 次元を n とすると $\tilde{u}$ は $\Omega \times \mathbf{R}^{m-n}$ 上では、局所的には到る所 singular な解になっている。このことは 方程式 $-\Delta u = u^p$ の正値弱解に対しては partial regularity theory がないことを示している。これはまた domain manifold の次元が 3 以上のときの weakly harmonic map の理論と類似しているとも考えられる。

他の指数 p に対しては、Ω の滑らかなコンパクト部分多様体 の互いに素な有限和を特異集合として prescribe できる。次の定理では少し記号を変えて Ω を $\mathbf{R}^N$ の有界 C^∞ 領域とする。

定理 2.2(Mazzeo-Pacard '96 [7])　Σ_i ($i = 1, \cdots, K$: 有限) を $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ の k_i 次元 C^∞ 部分多様体、境界なし、$\mathrm{codim}(\Sigma_i) = N - k_i \geq 3$ をみたすものとし、$\Sigma = \bigcup_{i=1}^K \Sigma_i$ (disjoint union) とおく。このとき指数 p が

$$\left(\frac{N}{N-2} <\right) \quad \frac{N-k_i}{N-k_i-2} \leq p < \frac{N-k_i+2}{N-k_i-2} \quad (i = 1, \cdots, K)$$

を満たすならば

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^p \quad \text{in } \Omega \\ \quad u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の正値弱解 $u \in L^p(\Omega)$ で $\mathrm{sing}(u) = \Sigma$ となるものが無限個存在する。

p の範囲の右端の値は、各 Σ_i の normal space ($\cong \mathbf{R}^{N-k_i}$) における critical Sobolev 指数であり、特に $\frac{N-k_i+2}{N-k_i-2} > \frac{N+2}{N-2}$ に注意。よって p は $\mathbf{R}^N$ の critical Sobolev 指数を越えて設定できる。ここで得た解 u は Σ の外では $C^{2,\alpha}$ の関数なので境界条件は各点で意味を持つ。またその特異性のために、たとえ Ω の形状がどのようであっても Pohozaev identity による 非存在定理の制約を受けなくともよい。

証明は近似解からの perturbation technique と不動点定理による。近似解の構成には、各 Σ_i の normal space 上での注意 1.1(3) のタイプの singular radial solution を用いる。($\frac{N-k_i}{N-k_i-2} < p < \frac{N-k_i+2}{N-k_i-2}$ のとき)

u が方程式 (1) の解のとき $u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{\frac{-2}{p-1}} u(\varepsilon^{-1}x)$ もまた (1) の解となるが、境界上 0-Dirichlet 条件を満たすためには、近似解の材料となる singular radial solution としてこの dilation で不変でないものが必要になる。このことが $p > \frac{N-k_i}{N-k_i-2}$ で常に存在する singular radial solution 1.1(2) ではなく (3) が必要な理由であり、また指数 p の範囲に上限 ($p < \frac{N-k_i+2}{N-k_i-2}$) がつく理由である。近似解の回りでの linearized operator は各 Σ_i に沿って係数が blow up する "edge" type の degenerate operator であり、この作用素の、ある重みつき Hölder 空間での全射性の証明に多くの紙数が費やされている。

注意 2.1　$K = 1(\dim\Sigma_1 = k)$ かつ p が $\frac{N-k}{N-k-2}$ に十分近いときには証明が簡単になる。(Y.Rébaï '96 [11])

注意 2.2　$\Sigma \subset \Omega \subset \mathbf{R}^N$を k 次元部分多様体とする ($k < N - \frac{2p}{p-1}$)。このとき、方程式 (1) の singular な "局所解" (つまり十分小さい ε に対する Σ の ε- 近傍上の解で Σ を特異集合として持つもの。境界条件も 0-Dirichlet ではない) は Mazzeo-Smale [6, §3] の方法で構成できる。このときの近似解には Σ の normal space 上での注意 1.1(2) を用いる。証明はそこで扱われている指数 $\frac{N+2}{N-2}$ を系統的に p に置き換えるだけで良い。しかしこの場合でも、不動点定理に必要な評価と線形化作用素の全射性との兼ね合いから、指数 p には $\frac{N-k}{N-k-2} < p < \frac{N-k+2}{N-k-2}$ の制限がつくことに注意する。

指数 p の値が更に大きいことを許すとき、非自明な高次元特異集合を持つ (1) の singular solution を構成することができるだろうか？

以下では特殊な k 次元多様体 $\Sigma \subset \mathbf{R}^{n+k}$($\mathbf{R}^{n+k}$ の等長変換群の k 次元 orbit) に対して Σ の十分小さな ε-近傍における (1) の正値弱解で、その特異集合が Σ となるものが構成可能なことを示す。指数 p は任意に大きく取れる。特に Σ の normal space の critical Sobolev 指数 $\frac{n+2}{n-2}$ を越えてもよい。ただし境界条件も適当に設定する必要がある。(一般には 0-Dirichlet 条件を満たすようにはできない)

§3."equivariant construction" method

original のアイデアは N.Smale [13] による。[13] では Euclid 空間 $\mathbf{R}^{n+k+1}$ 内の極小超曲面（境界付き）で非自明な k 次元特異集合を持つ例の構成が行われている。

3.1 設定と主結果

$n \geq 3$, $k \geq 1$ を 2 つの自然数とする。$\mathcal{U} \subset \mathbf{R}^k$ を $\{0\}_k \in \mathbf{R}^k$ を含む開集合とし、$\mathcal{U}$ に対し後に述べる仮定を満たすような k パラメーター C^∞ 群作用

$$\Phi : t \in \mathcal{U} \longmapsto \Phi(t) = G_t \in \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^{n+k})$$

が存在することを仮定する。ここに $\mathrm{Isom}(\mathbf{R}^{n+k})$ は $\mathbf{R}^{n+k}$ の等長変換群を表わす。以下で次のような記号を用いる。

$$\begin{aligned}
\Sigma \quad &= \{G_t(0) : t \in \mathcal{U}, 0 = (0,0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k\} \\
\tilde{\mathbf{B}}^n \quad &= B_1^n(0) \times \{0\}_k = \{\tilde{x} = (x, 0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, |x| < 1\} \\
\Omega \quad &= \{G_t(\tilde{\mathbf{B}}^n) : t \in \mathcal{U}\}
\end{aligned}$$

Σ は $\{0\} \in \mathbf{R}^{n+k}$ を通る群作用 Φ の k 次元 orbit、Ω は Σ 上の unit n 次元 disc bundle で、群作用 G_t で $\tilde{\mathbf{B}}^n$ を Σ に沿って動かすことによって得られる曲がった cylinder 状の領域である。群作用 Φ には次の仮定を置く:

- Σ は properly embedded な k 次元部分多様体 $\subset \mathbf{R}^{n+k}$
- $G_t(0) = 0 \Leftrightarrow G_t(\tilde{\mathbf{B}}^n) = \tilde{\mathbf{B}}^n$ $(\forall t \in \mathcal{U})$, つまり 0 の固定化群は $\tilde{\mathbf{B}}^n$ の固定化群と一致する。

さて $G_t \in \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^{n+k})$ が $G_t = O(t) + v_t$、$O(t) \in O(n+k)$ ($\mathbf{R}^{n+k}$ の直交変換群), $v_t \in \mathbf{R}^{n+k}$, 回転と平行移動、と分解されるとき、$\varepsilon > 0$ に対して新しい群作用 Φ_ε を、

$$\Phi_\varepsilon : t \in \mathcal{U} \longmapsto G_t^\varepsilon = O(t) + \frac{1}{\varepsilon} v_t \in \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^{n+k})$$

で定義する。さらに

$$\begin{aligned}
\Sigma_\varepsilon = &\quad \{G_t^\varepsilon(0) : t \in \mathcal{U}\} = \left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)\Sigma, \\
\Omega_\varepsilon = &\quad \{G_t^\varepsilon(\tilde{\mathbf{B}}^n) : t \in \mathcal{U}\}
\end{aligned}$$

と記す。$\varepsilon > 0$ が十分小さいとき Ω_ε は局所的には $\{0\}_n \times \mathbf{R}^k$ 上の trivial product bundle $B_1^n(0) \times \mathbf{R}^k$ に近い形状をしていることに注意する。

最後に $p^* > 1$ を

$$p^* = \sup\{p > 1 : \mathbf{Re}\left(\frac{2-n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 - A_p}\right) \geq \frac{-2}{p-1} + 1\}$$

で定義する。ここに

$$A_p = p(C_{n,p})^{p-1} = \frac{2p}{p-1}\left(n - \frac{2p}{p-1}\right) \ (> 0).$$

$\frac{-2}{p-1} + 1$ は $p > 1$ で単調に 1 に近づく。一方、$\mathbf{Re}\left(\frac{2-n}{2} - \sqrt{(\frac{n-2}{2})^2 - A_p}\right) \leq \frac{2-n}{2} < 0$ なので、十分大きいすべての p に対して $\mathbf{Re}(\frac{2-n}{2} - \sqrt{(\frac{n-2}{2})^2 - A_p}) < \frac{-2}{p-1} + 1$ である。p^*は有限の値で、特に $p > \frac{n+4}{n}$ のとき $\frac{-2}{p-1} + 1 > \frac{2-n}{2}$ をみたすことから $p^* \leq \frac{n+4}{n}$ である。

以上の準備の下で本稿での主結果を述べる。

定理 3.1　$p > \max(p^*, \frac{n}{n-2})$ を仮定。このとき Σ を含み、次の条件を満たす $\mathbf{R}^{n+k}$ の開集合 $\tilde{\Omega}$ が存在する : $\tilde{\Omega}$ 上の方程式 (1) の正値弱解 $\tilde{u}$ （ある境界条件付き）で、 $\mathrm{sing}(\tilde{u}) = \Sigma$ となるものが無限個存在する。

証明のキーポイントは次の通り。

- まず Ω_ε上の方程式 (1) の解 U で $\mathrm{sing}(U) = \Sigma_\varepsilon$ となるものを求める。
- ε 十分小のとき Ω_ε はほとんど cylinder $B_1^n(0) \times \mathbf{R}^k$のように見える。よって Ω_ε上の解 U は 例 1.2 の自明な高次元特異集合を持つ解に small perturbation を加えることで得られるであろう。
- 方程式を線形化して、不動点定理に持ち込むが、群作用に関する不変性を利用して disc bundle Ω_ε の各 section 特に $t = 0$ での slice $\tilde{\mathbf{B}}^n$上で PDE を解けばよい。
  このときの線形化作用素は [6] [7] らのときとは異なり、いわゆる "conic" type operator ([15] 参照。係数が 1 点で blow up) となり, 一般の "edge" type operator よりも取り扱いやすい。実際にこの場合には変数分離法による解の具体的表示が可能で、適当な境界データを置くことにより、その線形化作用素を invert することができる。

注意 3.2　境界データーを変えるごとに解を構成することができるが、境界データーは有限次元分を除いてしか prescribe できない。(補題 4.3 の後の注意を参照)

仮定を満たす群作用 Φ の具体例は [13, pp.600] を参照。そこでは例えば $k = 1$ のとき Σ として円周や helix が取れることが説明されている。

3.2 関数空間

以下では次のような関数空間 (重みつき Hölder 空間）で作業を行う。
$\nu \in \mathbf{R}, \alpha \in (0,1), m = 0, 1, 2,$ に対して

$$C^{m,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon) = \{u \in C^{m,\alpha}_{loc}(\Omega_\varepsilon \setminus \Sigma_\varepsilon) : |u|_{m,\alpha,\nu} < +\infty\}$$

とおく。ここで

$$|u|_{m,\alpha,\nu} = \sup_{0<s\leq 1/2} \left(\sum_{j=0}^{m} |\nabla^j u|_{0,[s,2s]} s^{j-\nu} + \sum_{j=0}^{m} |\nabla^j u|_{(\alpha),[s,2s]} s^{j+\alpha-\nu} \right)$$

∇ 、 ∇^2 はそれぞれ Ω_ε 上の gradient と Hessian、$|\eta|_{0,[s,2s]}, |\eta|_{(\alpha),[s,2s]}$ はそれぞれ Ω_ε 上の関数 η の、集合 $\{y = y(r,\theta,t) \in \Omega_\varepsilon : s \leq r \leq 2s\}$ 上での sup ノルム と α-次 Hölder セミノルム。ここでは $y = G_t^\varepsilon(\tilde{x}) \in \Omega_\varepsilon$ を $(x,t) = (r,\theta,t) \in B_1^n(0) \times \mathcal{U}$ と同一視している。((r,θ) は $x \in B_1^n(0)$ の 極座標) $C^{m,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon)$ はノルム $|\cdot|_{m,\alpha,\nu}$の下で Banach 空間となり、$u \in C^{m,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon)$ は Σ_ε の近くで $|u|$ が r^ν の定数倍で bound される $C^{m,\alpha}_{loc}$ の関数である。
さらに $C^{m,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon)$ の閉部分空間 $C_G^{m,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon)$ を

$$C_G^{m,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon) = \{u \in C^{m,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon) : u(G_t^\varepsilon(\tilde{x})) = u(\tilde{x}) \quad \text{for all } x \in B_1^n(0),\ t \in \mathcal{U}\}$$

で定義する。これは $C^{m,\alpha,\nu}$ の関数で 群作用 Φ_ε に関して不変なものの全体である。同様に $C^{m,\alpha}(\partial\Omega_\varepsilon)$ の関数で Φ_ε-不変なものの全体 を $C_G^{m,\alpha}(\partial\Omega_\varepsilon)$ と記す。

§4. 主結果の証明

4.1 近似解の構成

$\varepsilon > 0$ を固定する。$v_0 \in L^p(B_1^n(0))$ を $B_1^n(0)$ 上の方程式 (1) の singular radial solution (2) とする。$\Delta_{B^n} v_0 + v_0^p = 0$ かつ sing$(v_0)= \{0\} \in \mathbf{R}^n$ である。v_0 は任意の指数 $p > \frac{n}{n-2}$ に対して存在したことに注意する。この v_0 を用いて Ω_ε 上の関数 u_ε を

$$u_\varepsilon(G_t^\varepsilon(\tilde{x})) = v_0(x) \quad \text{for} \quad x \in B_1^n(0), \quad \mathrm{t} \in \mathcal{U}$$

で定義する。ここに $\tilde{x} = (x,0) \in \tilde{\mathbf{B}}^n$。$\Omega_\varepsilon$ の定義によって 任意の $y \in \Omega_\varepsilon$ は $y = G_t^\varepsilon(\tilde{x})$ と表わされることに注意。u_ε は群作用 Φ_ε に関して不変で、かつ sing$(u_\varepsilon) = \Sigma_\varepsilon$ をみたす。

4.2 Taylor 展開

4.1 で構成した近似解 u_ε に対し、$C_G^{2,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon)$ に属する小さな perturbation u を加えて $U = u_\varepsilon + u$ の形で方程式 (1) の正値弱解を構成するのが方針だった。

$N(u) = \Delta(u_\varepsilon + u) + (u_\varepsilon + u)^p$ とおく。(Δ は Ω_ε 上の Laplace 作用素)

$N(u)$ を $u = 0$ の回りで次のように Taylor 展開する。

$$N(u) = N(0) + Lu + Q(u),$$

ここに

$$\begin{aligned} N(0) &= \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon^p, \\ Lu &= \frac{d}{dt} N(tu)|_{t=0} = \Delta u + p u_\varepsilon^{p-1} u, \\ Q(u) &= \int_0^1 (1-t) \frac{d^2}{dt^2} N(tu) dt \\ &= (u_\varepsilon + u)^p - u_\varepsilon^p - p u_\varepsilon^{p-1} u. \end{aligned}$$

よって Ω_ε 上の方程式 $N(u) = 0$ は方程式 $Lu = -N(0) - Q(u)$ と同値だが、

$$\begin{aligned} R &= \Delta - \Delta_{B^n}, \\ L_0 &= \Delta_{B^n} + p u_\varepsilon^{p-1}. \end{aligned}$$

とおいて、これをさらに

$$L_0 u = -N(0) - Ru - Q(u) \tag{4}$$

と書き換えて、以降、方程式 (4) を縮小写像の不動点定理を用いて解くことにする。群作用に関する不変性から、方程式 (4) は disc bundle Ω_ε の $t = 0$ に対する section $\tilde{\mathbf{B}}^n$ 上の PDE として取り扱うことができる。このとき、線形化作用素 L_0 は $\tilde{\mathbf{B}}^n$ の原点でのみ係数

が blow up する conic type operator で、edge type operator L よりも扱いが容易である。この利点を十分に生かすことが "equivariant construction" method の要点である。

4.3 評価

Ω_ε 上の Laplace 作用素 Δ に対しては次の分解が成り立つ。

補題 4.1(Mazzeo-Smale '91 [6])

$$\Delta = \Delta_{B^n} + \Delta_{R^k} + e_1\nabla^2 + e_2\nabla, \tag{5}$$

ここに ∇ 、∇^2 はそれぞれ Ω_ε 上の gradient 及び Hessian、$e_1 \in C^\infty((Sym^2\Omega_\varepsilon)^*)$, $e_2 \in C^\infty(T^*\Omega_\varepsilon)$ はそれぞれ smooth section で、ε に無関係な定数 C_0 が存在して

$$\begin{aligned}
&|e_1(x,t)| \le C_0 r\varepsilon, && |e_2(x,t)| \le C_0\varepsilon,\\
&|e_1|_{(\alpha),[s,2s]}s^\alpha \le C_0 s\varepsilon, && |e_2|_{(\alpha),[s,2s]}s^\alpha \le C_0\varepsilon
\end{aligned}$$

をみたす。

注意　群作用 Φ_εに関して不変な関数に作用するときは (5) 式右辺の Δ_{R^k} は不要。

補題 4.1 を用いて次の評価が得られる。

補題 4.2(評価)　$\varepsilon > 0$, $\nu \in (\frac{-2}{p-1}, \frac{-2}{p-1}+1)$, $u \in C_G^{2,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon)$ に対し、$N(0)$, Ru, $Q(u)$ はすべて Φ_ε-不変な関数で次の評価が成り立つ。

$$\begin{aligned}
|N(0)|_{0,\alpha,\nu-2} &\le C_1\varepsilon,\\
|Ru|_{0,\alpha,\nu-2} &\le C_1\varepsilon|u|_{2,\alpha,\nu}.
\end{aligned}$$

さらに正数 C_2 が存在して $|u|_{2,\alpha,\nu}, |v|_{2,\alpha,\nu} < C_2$ をみたす $u, v \in C_G^{2,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon)$ に対し

$$|Q(u) - Q(v)|_{0,\alpha,\nu-2} \le C_1\left(|u|_{2,\alpha,\nu} + |v|_{2,\alpha,\nu}\right)|u-v|_{2,\alpha,\nu}.$$

特に $v \equiv 0$ として

$$|Q(u)|_{0,\alpha,\nu-2} \le C_1|u|^2_{2,\alpha,\nu}$$

が成り立つ。ここに $C_1 > 0, C_2 > 0$ は ε に無関係な定数。

証明　u_ε, u が Φ_ε-不変なので $N(0)$, Ru, $Q(u)$ がまた Φ_ε-不変なのは見やすい。よってこれらを自然に $B_1^n(0)$ 上の関数とみなすことができる。このとき

$$\begin{aligned}
N(0) &= \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon^p\\
&= (\Delta - \Delta_{B^n})u_\varepsilon \qquad (\Delta_{B^n}u_\varepsilon + u_\varepsilon^p = 0 \text{ より})
\end{aligned}$$

だから補題 4.1 (5) 式、及び $|\nabla u_\varepsilon(x)| \le Cr^{\frac{-2}{p-1}-1}$, $|\nabla^2 u_\varepsilon(x)| \le Cr^{\frac{-2}{p-1}-2}$ を用いて

$$\begin{aligned}
|N(0)(x)| &\le |e_1\nabla^2 u_\varepsilon(x)| + |e_2\nabla u_\varepsilon(x)|\\
&\le Cs\varepsilon\cdot Cs^{\frac{-2}{p-1}-2} + C\varepsilon\cdot s^{\frac{-2}{p-1}-1}
\end{aligned}$$

が $s \le |x| \le 2s$ となる $x \in B_1^n(0)$ に対して成り立つ。よって

$$
\begin{aligned}
|N(0)|_{0,[s,2s]}s^{2-\nu} &\le C\varepsilon s^{\frac{-2}{p-1}+1-\nu} \\
&\le C\varepsilon. \qquad (\text{仮定 } \nu < \frac{-2}{p-1}+1 \text{ 及び } 0 < s \le 1/2 \text{ より})
\end{aligned}
$$

Hölder seminorm の評価も同様である。両辺の $s \le 1/2$ に関する sup をとって $|N(0)|_{0,\alpha,\nu-2}$ の評価が得られる。

同様に (5) より

$$
\begin{aligned}
Ru &= (\Delta - \Delta_{B^n})u = e_1\nabla^2 u + e_2 \nabla u, \\
|Ru|_{0,[s,2s]}s^{2-\nu} &\le Cs\varepsilon|\nabla^2 u|_{0,[s,2s]}s^{2-\nu} + C\varepsilon|\nabla u|_{0,[s,2s]}s^{1-\nu}\cdot s \\
&\le C\varepsilon\left(|\nabla^2 u|_{0,[s,2s]}s^{2-\nu} + |\nabla u|_{0,[s,2s]}s^{1-\nu}\right)
\end{aligned}
$$

が $0 < s \le 1/2$ に対して成立。Hölder seminorm の評価も同様なので、両辺の $\sup_{0<s\le 1/2}$ をとって $|Ru|_{0,\alpha,\nu-2}$の評価が得られる。

(Hölder seminorm の基本的性質

$$
|\mu+\eta|_{(\alpha)} \le |\mu|_{(\alpha)} + |\eta|_{(\alpha)}, \quad |\mu\eta|_{(\alpha)} \le |\mu|_{(0)}|\eta|_{(\alpha)} + |\mu|_{(\alpha)}|\eta|_{(0)}
$$

を用いる。)

$Q(u)$ の評価に関しては、まず $\forall x \in B_1^n(0)\setminus\{0\}$ に対し

$$
\begin{aligned}
|u(x)| &\le 2^{-\nu}|u|_{2,\alpha,\nu}r^{-\nu} \\
&\le 2^{-\nu}|u|_{2,\alpha,\nu}r^{\frac{-2}{p-1}}. \qquad (\text{仮定 } \nu > \frac{-2}{p-1} \text{ と } 0 < r \le 1/2 \text{ より})
\end{aligned}
$$

よって $|u|_{2,\alpha,\nu}$が十分小$\left(|u|_{2,\alpha,\nu} < C_2 \stackrel{\text{def}}{=} 2^\nu C_{n,p}\cdot(1/10)\right)$ のとき $B_1^n(0)\setminus\{0\}$ の各点で $|u(x)| < (1/10)u_\varepsilon(x)$ と各点評価できることに注意する。このとき $u_\varepsilon + u$ は $B_1^n(0)\setminus\{0\}$ 上の正値関数なので $Q(u) = (u_\varepsilon+u)^p - u_\varepsilon^p - pu_\varepsilon^{p-1}u$ は well-defined であり、$|u/u_\varepsilon| \le 1/10$ 、$|v/u_\varepsilon| \le 1/10$ となる u、v に対し $Q(u)-Q(v)$ の表式で Taylor 展開（一般 2 項展開）を用いることができる。結局、$\forall x \in B_1^n(0)\setminus\{0\}$ に対し

$$
|Q(u)-Q(v)|(x) \le C|u_\varepsilon(x)|^{p-2}\left(|u(x)|+|v(x)|\right)|u(x)-v(x)| \tag{6}
$$

を得る。

(6) から $s \le |x| \le 2s$ なる $x \in B_1^n(0)$ に対して

$$
|Q(u)-Q(v)|(x) \le Cs^{\left(\frac{-2}{p-1}\right)(p-2)}\left(|u|_{0,[s,2s]} + |v|_{0,[s,2s]}\right)|u-v|_{0,[s,2s]}.
$$

よって

$$
\begin{aligned}
s^{2-\nu}|Q(u)-Q(v)|_{0,[s,2s]} &\le Cs^{2-\nu}\cdot s^{\frac{-2(p-2)}{p-1}}\cdot s^{2\nu}\left(|u|_{0,[s,2s]}s^{-\nu} + |v|_{0,[s,2s]}s^{-\nu}\right)|u-v|_{0,[s,2s]}s^{-\nu} \\
&\le Cs^{\nu+\frac{2}{p-1}}\left(|u|_{2,\alpha,\nu} + |v|_{2,\alpha,\nu}\right)|u-v|_{2,\alpha,\nu}.
\end{aligned}
$$

仮定 $\nu > \frac{-2}{p-1}$ 及び $0 < s \leq 1/2$ より $s^{\nu+\frac{2}{p-1}} \leq 1$ である。よって

$$\sup_{0<s\leq 1/2} |Q(u)|_{0,[s,2s]} s^{2-\nu} \leq C\left(|u|_{2,\alpha,\nu} + |v|_{2,\alpha,\nu}\right)|u-v|_{2,\alpha,\nu}.$$

一方、$Q(u)$ の Hölder seminorm の評価を得るには、次の事実：

$$w \in C^{k+1,0,\nu}, |\nabla w| \in C^{k,0,\nu-1} \Rightarrow w \in C^{k,\alpha,\nu} \qquad (\text{for } \forall \alpha \in (0,1))$$

に注意して $s^{3-\nu}|Q(u)-Q(v)|_{0,[s,2s]}$ を評価すればよい。それには、実際に微分することで

$$\nabla Q(u) = p\left((u_\varepsilon+u)^{p-1} - u_\varepsilon^{p-1} - (p-1)u_\varepsilon^{p-2}u\right)\nabla u_\varepsilon + p\left((u_\varepsilon+u)^{p-1} - u_\varepsilon^{p-1}\right)\nabla u$$

と計算し、再び Taylor 展開を用いて

$$\begin{aligned} |\nabla Q(u) - \nabla Q(v)|(x) \ &\leq \ C|u_\varepsilon(x)|^{p-3}\left(|u(x)| + |v(x)|\right)|u(x)-v(x)||\nabla u_\varepsilon(x)| \\ &+ \ C|u_\varepsilon(x)|^{p-2}\left(|\nabla u - \nabla v|(x)|u(x)+v(x)| + |u(x)-v(x)||\nabla u + \nabla v|(x)\right) \end{aligned}$$

の各項を 同様に評価すればよい。 □

4.4 一意可解性

方程式 (4) を不動点定理の枠組みで解くために、重みつき Hölder 空間 $C_G^{2,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon)$ での線型方程式 $L_0 u = f$ の一意可解性に関する次の補題を思い出す。この結果は Caffarelli-Hardt-Simon [3] による。([14],[12] も参照)

まず記号を用意する。λ_j, ϕ_j ($j = 0, 1, \cdots$, 重複度も込めて数える) を $\Delta_{S^{n-1}}$ の $L^2(S^{n-1})$ での固有値、及び正規化固有関数とする。$\Delta_{S^{n-1}}\phi_j + \lambda_j\phi_j = 0$ かつ $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots$, $\lambda_j \to \infty$ である。線形化作用素 L_0 は $B_1^n(0)$ での極座標を用いて

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^{n-1}} + \frac{A_p}{r^2}$$

と表わされる。ここに $A_p = p(C_{n,p})^{p-1} = (\frac{2p}{p-1})(n - \frac{2p}{p-1})$。$j = 0, 1, \cdots$ に対し、 L_0 の特異点 $r = 0$ での特性根、つまり 2 次方程式 $x^2 + (n-2)x - (\lambda_j - A_p) = 0$ の 2 根をそれぞれ

$$\gamma_j(+) = \frac{2-n}{2} + \sqrt{\frac{(n-2)^2}{4} + \lambda_j - A_p} \quad , \quad \gamma_j(-) = \frac{2-n}{2} - \sqrt{\frac{(n-2)^2}{4} + \lambda_j - A_p}$$

とおく。$j \geq 1$ に対し $\gamma_j(\pm) \in \mathbf{R}$ となることがわかる ($\lambda_1 = n-1$ に注意)。$\gamma_0(\pm)$ は実数とは限らない。

今、$\nu \in \mathbf{R}$ を

$$\nu > \mathbf{Re}\gamma_0(-) \quad \text{かつ} \quad \nu \notin \{\mathbf{Re}\gamma_j(+) : j = 0, 1, 2, \cdots\} \tag{7}$$

を満たすようにとり、整数 J を

$$\begin{cases} J = -1 & \nu < \mathbf{Re}\gamma_0(+) \text{ のとき} \\ \mathbf{Re}\gamma_J(+) < \nu < \mathbf{Re}\gamma_{J+1}(+) & \text{その他のとき} \end{cases}$$

を満たすように定める。(一意に定まる)

さらに $\Pi_J^{\perp} : L^2(S^{n-1}) \to L^2(S^{n-1})$ を

$$\Pi_J^{\perp}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\phi_j\right) = \sum_{j=J+1}^{\infty} a_j\phi_j \quad (\text{ただし } J=-1 \text{ のときは } \Pi_J^{\perp} = \mathrm{Id})$$

で定義する。

以上の記号の下で、

補題 4.3(Caffarelli-Hardt-Simon '84 [3]) $\nu \in \mathbf{R}$ 及び J を上の通りとする。このとき任意の $f \in C_G^{0,\alpha,\nu-2}(\Omega_\varepsilon)$ 及び $\psi \in C_G^{2,\alpha}(\partial\Omega_\varepsilon)$ $(0 < \alpha < 1)$ に対し、次を満たす $u \in C_G^{2,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon)$ が一意に存在する。

(8)
$$\begin{cases} L_0 u &= f \quad \text{on } \Omega_\varepsilon, \\ \Pi_J^{\perp}(u|_{\partial\Omega_\varepsilon}) &= \Pi_J^{\perp}(\psi). \end{cases}$$

さらに u は次の評価を満たす。

$$|u|_{2,\alpha,\nu} \le C_3\left(|f|_{0,\alpha,\nu-2} + |\psi|_{2,\alpha}\right)$$

ここに C_3 は ε に依らない正数。

証明の概略 群作用 Φ_ε に関する不変性から (8) を disc bundle Ω_ε の $t=0$ での section $\tilde{\mathbf{B}}^n$ 上で考えてよい。このとき証明は変数分離法によって行うことができる。

$$\begin{aligned} f(r,\theta) &= \sum_{j=0}^{\infty} f_j(r)\phi_j(\theta), \quad f_j(r) = \langle f(r,\cdot), \phi_j(\cdot)\rangle_{L^2(S^{n-1})}, \\ \psi(\theta) &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j\phi_j(\theta), \quad \psi_j = \langle \psi, \phi_j\rangle_{L^2(S^{n-1})} \end{aligned}$$

(和は L^2 強収束の意味) と表わし、$u(r,\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(r)\phi_j(\theta)$ の形で解を求める。

u が (8) の解であるためには、各 u_j は次の ODE (境界条件付き) を満たさなければならない。

$$\begin{cases} a''(r) + \frac{n-1}{r}a'(r) - \frac{\lambda_j - A_p}{r^2} = f_j(r), \\ a(1) = \psi_j \quad \text{for} \quad j > J, \\ |a(r)| \le Cr^{\nu}. \end{cases}$$

簡単な常微分方程式の理論から、各 j に対し次が一意解であることがわかる。

$$\begin{aligned} u_j(r) &= \mathbf{Re}\left[r^{\gamma_j(+)}\int_0^r \tau^{1-n-2\gamma_j(+)}\int_0^\tau s^{n-1+\gamma_j(+)}f_j(s)\,ds\,d\tau\right], \quad (j = 0,1,\cdots,J) \\ u_j(r) &= \psi_j r^{\gamma_j(+)} - r^{\gamma_j(+)}\int_r^1 \tau^{1-n-2\gamma_j(+)}\int_0^\tau s^{n-1+\gamma_j(+)}f_j(s)\,ds\,d\tau. \quad (j > J) \end{aligned}$$

ν の条件 (7) は右辺の積分が well-def であるための条件であることに注意。たとえば 任意の $j = 0,1,2,\cdots$ について、$f_j \in C_G^{0,\alpha,\nu-2}(\Omega_\varepsilon)$ $(|f_j(s)| \le Cs^{\nu-2})$ に対する積分 $\left|\int_0^\tau s^{n-1+\gamma_j(+)}f_j(s)ds\right|$ が有限となる条件が $\nu > \mathbf{Re}\gamma_0(-)$ である。上の u_j に対して、関数

$u=\sum_{j=0}^{\infty}u_j(r)\phi_j(\theta)$ が境界条件を満たす (8) の解となる。u の評価式については [13] 参照。 $\square$

注意　$u|_{\partial\Omega_\varepsilon}$ の低次の固有関数 $\phi_j(j=0,1,\cdots,J)$ に関する Fourier 係数は自由に設定することはできない。これらは f によって決定される。それは $r=0$ においての decay 条件 $|u(r)|\le Cr^\nu$ という別の"境界"条件が付与されているためである。

$C_{G,0}^{2,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon)=\left\{u\in C_G^{2,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon):u\equiv 0 \text{ on } \partial\Omega_\varepsilon\right\}$ とおくと、

$$J+1=\dim \operatorname{coker}\left(L_0|_{C_{G,0}^{2,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon)}:C_{G,0}^{2,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon)\to C_G^{0,\alpha,\nu-2}(\Omega_\varepsilon)\right)$$

がわかる。

4.5 不動点定理

補題 4.2, 補題 4.3 を用いて方程式 (4) を解こう。今、われわれの定理の仮定から

$$\max\left(\frac{-2}{p-1},\mathbf{Re}\gamma_0(-)\right)<\nu<\frac{-2}{p-1}+1 \quad \text{かつ} \quad \nu\notin\{\mathbf{Re}\gamma_j(+):j=0,1,2,\cdots\}$$

を満たす $\nu\in\mathbf{R}$ が存在する。以降、この条件を満たす ν と $\alpha\in(0,1)$ を 1 つ固定しておく。

さて $K>0$, $\varepsilon>0$ に対し $C_G^{2,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon)$ の閉球 $B_{K\varepsilon,\alpha,\nu}=\left\{u\in C_G^{2,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon):|u|_{2,\alpha,\nu}\le K\varepsilon\right\}$ を定義する。ここに $K\varepsilon\le C_2$（補題 4.2）を要請しておく。

補題 4.4　次のような $K>0$ と $\bar\varepsilon\in(0,1)$ が存在する: $\varepsilon<\bar\varepsilon$ に対して $v\in B_{K\varepsilon,\alpha,\nu}$ かつ $\psi\in C_G^{2,\alpha}(\partial\Omega_\varepsilon)$ が $|\psi|_{2,\alpha}\le\varepsilon$をみたすならば、次の境界値問題

$$\left\{\begin{array}{rl} L_0u &= -N(0)-Rv-Q(v) \\ \Pi_J^{\perp}(u|_{\partial\Omega_\varepsilon}) &= \Pi_J^{\perp}(\psi)\end{array}\right. \tag{9}$$

が $B_{K\varepsilon,\alpha,\nu}$ に属する一意解 u を持つ。

証明　補題 4.2 及び 補題 4.3 から (9) は一意解 $u\in C_G^{2,\alpha,\nu}(\Omega_\varepsilon)$ を持つ。さらに補題 4.3 の評価と補題 4.2 及び $|v|_{2,\alpha,\nu}\le K\varepsilon$ より

$$\begin{aligned}|u|_{2,\alpha,\nu} &\le C_3\left(|\psi|_{2,\alpha}+|N(0)|_{0,\alpha,\nu-2}+|Rv|_{0,\alpha,\nu-2}+|Q(v)|_{0,\alpha,\nu-2}\right)\\ &\le C_3\left(\varepsilon+C_1\varepsilon+C_1\varepsilon|v|_{2,\alpha,\nu}+C_1|v|_{2,\alpha,\nu}^2\right)\\ &\le C_3\left(\varepsilon+C_1\varepsilon+C_1\varepsilon\cdot K\varepsilon+C_1K^2\varepsilon^2\right)\\ &\le C_4\left(\varepsilon+K\varepsilon^2+K^2\varepsilon^2\right).\end{aligned}$$

よって $C_4\left(\frac{1}{K}+\varepsilon+K\varepsilon\right)\le 1$ をみたす K と ε が取れれば $u\in B_{K\varepsilon,\alpha,\nu}$ となる。それにはまず $K>0$を十分大きくとって $\frac{C_4}{K}<\frac{1}{2}$を満たすように固定する。次に$\bar\varepsilon>0$を $C_4\bar\varepsilon(1+K)<\frac{1}{2}$ かつ $K\bar\varepsilon<C_2$を満たすように十分小さくとればよい。 $\square$

以降、補題 4.4 の $K>0$ と $\varepsilon<\bar\varepsilon$ を 1 つ固定する。$\psi\in C_G^{2,\alpha}(\partial\Omega_\varepsilon)$ を $|\psi|_{2,\alpha}\le\varepsilon$を満たすようにとる。$v\in B_{K\varepsilon,\alpha,\nu}$ に対し、$T(v)$ を補題 4.4 で与えられる (9) の一意解とすると、同じ補題から $T:B_{K\varepsilon,\alpha,\nu}\to B_{K\varepsilon,\alpha,\nu}$(self map) となる。

さらに $v_1, v_2 \in B_{K\varepsilon,\alpha,\nu}$ に対し

$$\begin{aligned}|T(v_1)-T(v_2)|_{2,\alpha,\nu} &\leq C_3|R(v_1-v_2)|_{0,\alpha,\nu-2}+C_3|Q(v_1)-Q(v_2)|_{0,\alpha,\nu-2} \quad (\text{補題 } 4.3)\\ &\leq C_3C_1\varepsilon|v_1-v_2|_{2,\alpha,\nu}+C_3C_1\left(|v_1|_{2,\alpha,\nu}+|v_2|_{2,\alpha,\nu}\right)|v_1-v_2|_{2,\alpha,\nu} \quad (\text{補題 } 4.2)\\ &\leq C_5\left(\varepsilon+K\varepsilon\right)|v_1-v_2|_{2,\alpha,\nu}.\end{aligned}$$

必要なら $\bar{\varepsilon}$ を小さく取り直して $C_5(\bar{\varepsilon}+K\bar{\varepsilon})<1$ を満たすように要請すると、$T: B_{K\varepsilon,\alpha,\nu} \to B_{K\varepsilon,\alpha,\nu}$ は Banach 空間の閉球上の contraction map となる。よって T はただ 1 つの不動点 $u \in B_{K\varepsilon,\alpha,\nu}$を持つ。この u に対し $U=u_\varepsilon+u$ が方程式 (1) の Ω_ε 上での正値弱解である。

u は $x \in B_1^n(0)$ の各点で $|u(x)| \leq (1/10)u_\varepsilon(x)$ を満たすことから、$U=u_\varepsilon+u$ の正値性と $\mathrm{sing}(u_\varepsilon+u)=\mathrm{sing}(u_\varepsilon)=\Sigma_\varepsilon$ が結論できる。

最終的に、$\tilde{u}(x)=\varepsilon^{\frac{-2}{p-1}}U(\varepsilon^{-1}x)$, $x \in \tilde{\Omega} \overset{\mathrm{def}}{=} \varepsilon\cdot\Omega_\varepsilon$ とおくと、方程式 (1) の scale invariance から $\tilde{u}$ は

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{u} &= (\tilde{u})^p \quad \text{in } \tilde{\Omega},\\ \mathrm{sing}(\tilde{u}) &= \varepsilon\cdot\mathrm{sing}(U)=\varepsilon\cdot\Sigma_\varepsilon=\Sigma \end{cases}$$

をみたす。これで定理 3.1 が証明できた。 □

<u>注意</u>
同様の方法による高次元特異集合を持つ PDE の解の構成は

- Liao-Smale [5]: Harmonic map system
- T.Molinaro [8] [9]: $-\Delta u=\lambda e^u(\lambda>0)$ in $\mathbf{R}^n(n\geq 3)$

に対して行われている。指数型非線型項を持つ方程式の場合、近似解は $\mathbf{R}^n(n\geq 3)$ での singular radial solution $v_0(x)=-2\log|x|+\log 2(n-2)-\log\lambda$ から構成する。

§5. stability

$n\geq 3$, $p>\frac{n}{n-2}$ とする。まず $B_1^n(0)$ 上の方程式 (1) の singular radial solution v_0 (注意 1.1(2)) の strict stability の概念について述べる。

v_0 の回りでの (1) の線形化作用素 $L_0=\Delta_{B^n}+pv_0^{p-1}$ に対し

$$L_{0,\delta}=L_0|_{C^2(B^n_{\delta,1}(0))}, \qquad B^n_{\delta,1}(0)=\{x\in\mathbf{R}^n:\delta<|x|<1\}$$

とおく。

このとき、作用素 $|x|^2L_{0,\delta}$ は $L^2\left(B^n_{\delta,1}(0),|x|^{-2}dx\right)$ 上の一様楕円型、自己共役作用素で、その Dirichlet-0 境界条件下でのスペクトルは、固有値 $\{\mu_k(\delta)\}_{k=0,1,2,\cdots}$, $\mu_0(\delta)\leq\mu_1(\delta)\leq\cdots\leq\mu_k(\delta)\to\infty$, から成る。

<u>**定義** 5.1</u> $v_0(x)=C_{n,p}r^{\frac{-2}{p-1}}$ が strictly stable $\Leftrightarrow$ $\inf_{0<\delta<1}\mu_0(\delta)>0$.

次が計算できる。

<u>定理 5.2</u> 以下の区間 I に属する指数 p に対して v_0 は strictly stable:

$$\mathrm{I} = \begin{cases} \left(\frac{n}{n-2}, p_1^*\right) & (2 < n < 10 \text{ のとき}) \\ \left(\frac{5}{4}, \frac{4}{3}\right) & (n = 10 \text{ のとき}) \\ \left(\frac{n}{n-2}, p_1^*\right) \cup (p_2^*, +\infty) & (n > 10 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここに

$$\begin{aligned} p_1^* &= \frac{n+2\sqrt{n-1}}{n-4+2\sqrt{n-1}} &= \frac{n^2-8n+4-8\sqrt{n-1}}{(n-2)(n-10)} \\ p_2^* &= \frac{n-2\sqrt{n-1}}{n-4-2\sqrt{n-1}} &= \frac{n^2-8n+4+8\sqrt{n-1}}{(n-2)(n-10)} \end{aligned}$$

p_1^*, p_2^* はそれぞれ p についての方程式 $(n-2)^2 - 4p\left(\frac{2}{p-1}\right)\left(n - \frac{2p}{p-1}\right) = 0$ の解である。

<u>定理 5.3</u> $p > \max(p^*, \frac{n}{n-2})$ かつ $p \in \mathrm{I}$ を満たす指数 p に対して、定理 3.1 で構成した方程式 (1) の正値弱解 $\tilde{u}$ は stable, つまり第 2 変分不等式

$$\int_{\tilde{\Omega}} |\nabla v|^2 - p(\tilde{u})^{p-1} v^2 dx \geq 0, \quad \forall v \in C_0^2(\tilde{\Omega})$$

を満たす。

参考文献

[1] P. Aviles, *On isolated singularities in some nonlinear partial differential equations* Indiana.Univ.Math.J. **32**, 1983, pp773-791

[2] Ph. Bénilan, H. Brezis, and M. Crandall, *A semilinear elliptic equation in* $L^1(\mathbf{R}^n)$ Ann.Scu.Norm.Sup.Pisa **2**, 1975, pp523-555

[3] L. Caffarelli, R. Hardt, and L. Simon, *Minimal surfaces with isolated singularities* Manuscripta Math. **48**, 1984, pp1-18

[4] B. Gidas and J.Spruck, *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations* Comm.Pure Appl.Math. **34**, 1981, pp525-598

[5] G. Liao and N. Smale, *Harmonic maps with nontrivial higher-dimensional singularities* Lec.Note.Pure. and Appl.Math **144**, 1993, pp79-89

[6] R. Mazzeo and N. Smale, *Conformally flat metrics of constant positive curvature on subdomains of the sphere* J.Diff.Geo. **34**, 1991, pp581-621

[7] R. Mazzeo and F.Pacard, *A construction of singular solutions for a semilinear elliptic equation using asymptotic analysis* J.Diff.Geo. **44**, 1996, pp331-370

[8] T. Molinaro, *Construction of some solutions of a nonlinear elliptic partial differential equation having a nonpunctual prescribed singular set* Comm.P.D.E. **20**, 1995, pp357-365

[9] T. Molinaro, *Multiple singular sets for solutions of an elliptic nonlinear scalar partial differential equation* Nonlinear Anal.T.M.A. **28**, 1997, pp595-610

[10] F.Pacard, *Existence and convergence of positive weak solutions of* $-\Delta u = u^{\frac{n}{n-2}}$ *in bounded domains of* $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$ J.Calc.Var.and PDE **1**, 1993, pp243-265

[11] Y.Rébaï, *Weak solutions of nonlinear elliptic equations with prescribed singular set* J.Diff.Eqn. **127**, 1996, pp439-453

[12] L. Simon, *Isolated singularities of extrema of geometric variational problems* Springer. Lect. Notes in Math.**1161**, 1985, pp206-277

[13] N. Smale, *An equivariant construction of minimal surfaces with nontrivial singular sets* Indian.Univ.Math.J. **40**, 1991, pp595-616

[14] N. Smale, *Minimal hypersurfaces with many isolated singularities* Ann.of Math. **130**, 1989, pp603-642

[15] N. Smale, *Geometric P.D.E.'s with isolated singularities* J.reine angew. Math. **440**, 1993, pp1-41